

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

$$\frac{a+b}{a-b} = 6 \Rightarrow a+b = 6a-6b \Rightarrow 7b = 5a \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{7a-b}{7a} = \frac{7a}{7a} - \frac{b}{7a} = \frac{7}{7} - \frac{1}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{14-5}{49} = \frac{9}{49} = \frac{3}{7}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲

چون $ST \parallel BC$ ، پس طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{ST}{BC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{3y+3}{3y+9} = \frac{6}{4x+1}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{y+1}{y+3} \Rightarrow 2y+6 = 3y+3 \Rightarrow y = 3$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{4x+1} \Rightarrow 8x+2 = 18 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow x+y = 5$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳

نقطه $M \left| \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \right|$ روی بیضی است، چون $F \left| \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \right|$ کانون بیضی و کانون دیگر $F' \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right|$ است، پس:

$$FF' = a\sqrt{2} \Rightarrow 2c = a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow MF = MF' = a$$

دقت کنید:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴

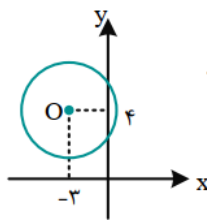
اگر صفحه موازی با قاعده استوانه باشد، سطح مقطع، دایره است.
اگر صفحه با قاعده‌ها و محور استوانه موازی نباشد، سطح مقطع، بیضی است.
اگر صفحه با محور استوانه موازی باشد، سطح مقطع، مستطیل است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵

$$(2x+6)^2 + (2y-8)^2 = 40 \Rightarrow 4(x+3)^2 + 4(y-4)^2 = 40 \Rightarrow (x+3)^2 + (y-4)^2 = 10$$

$$\Rightarrow O(-3, 4), R = \sqrt{10}$$

با رسم دایره در دستگاه محورهای مختصات مشخص می‌شود که دایره از نواحی **اول و دوم** می‌گذرد.

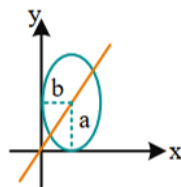
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶

چون خط $y = 4x$ از مرکز بیضی عبور می‌کند، پس: $a = 4b$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{15b^2}{a^2}}$$

$$e = \sqrt{\frac{15b^2}{16b^2}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$



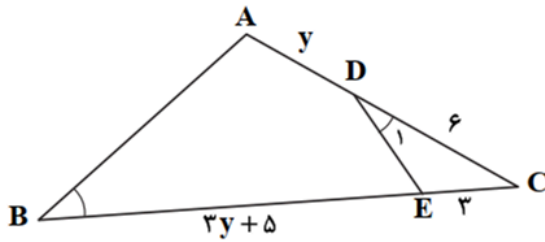
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

نکته: نسبت مساحت دو مثلث متشابه، مربع نسبت تشابه آن دو مثلث است.

با توجه به شکل، داریم:



$$\triangle ABC, \triangle DEC : \begin{cases} \hat{C} \text{ مشترک} \\ \hat{B} = \hat{D}_1 \end{cases} \xrightarrow{(ز)} \triangle ABC \sim \triangle DEC$$

اکنون نسبت تشابه را به دست می‌آوریم:

$$\frac{EC}{AC} = \frac{DC}{BC} = k \Rightarrow \frac{3}{y+6} = \frac{6}{3y+5+3} \Rightarrow \frac{1}{y+6} = \frac{2}{3y+8}$$

$$\Rightarrow 3y+12 = 2y+12 \Rightarrow y=4 \Rightarrow k = \frac{3}{y+6} = \frac{3}{10}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \frac{9}{100} = 0.09$$

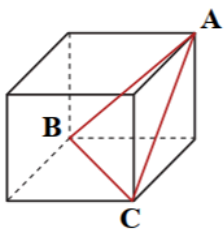
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۸

نکته: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

با توجه به شکل، مقطع جدا شده، یک مثلث متساوی‌الاضلاع است که هر ضلع آن برابر طول قطر یک وجه

مکعب (قطر مربع) است. اگر ضلع مکعب برابر a باشد، داریم:



$$AB = AC = BC = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{(\text{ضلع})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow V_{\text{مکعب}} = a^3 = 8$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۹

نکته: مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

نکته: اگر در یک بیضی، اندازه نیم‌قطر بزرگ را a ، اندازه نیم‌قطر کوچک را b و نصف فاصله کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه: $a^2 = b^2 + c^2$

نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

$$FF' = 2c = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

نقاط $F(3, 0)$ و $F'(0, 3)$ کانون‌های بیضی هستند، پس:

بیضی از مبدأ مختصات عبور کرده است، پس مجموع فاصله O تا F و F' ، برابر با $2a$ است:

$$OF + OF' = 2a \Rightarrow 3 + 3 = 2a \Rightarrow a = 3$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۰

نکته: رابطه $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ معادله دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در صفحه مختصات است که به آن «معادله استاندارد دایره» می‌گوییم.

نکته: اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله گسترده یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است. شعاع این دایره

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

برابر است با:

نکته: پاره خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند، «خط‌المركزین» نامیده می‌شود.

اگر $OO' = |r - r'|$ ، دو دایره مماس درون هستند.

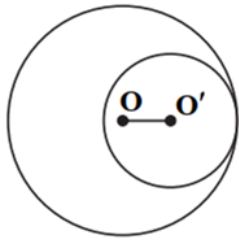
ابتدا مختصات مرکز و شعاع هر دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0 \Rightarrow O(2, -1), r = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 44} = 4$$

$$C': (x+1)^2 + (y-3)^2 = 81 \Rightarrow O'(-1, 3), r' = \sqrt{81} = 9$$

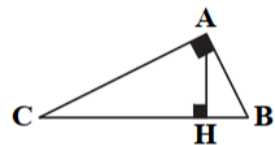
اکنون طول خط‌المركزین را به دست می‌آوریم: $d = OO' = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \Rightarrow 5 = 9-4 \Rightarrow d = r' - r$ بنابراین دو دایره مماس درون هستند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



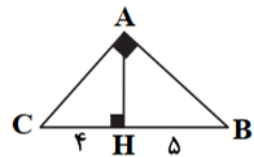
۱۱

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر با حاصل ضرب دو قطعه جداشده بر روی وتر برابر است. (ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو قطعه جداشده روی وتر است.)



$$AH^2 = BH \times CH$$

طبق نکته فوق داریم:



$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow AH^2 = 5 \times 4 \Rightarrow AH = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 9 = 9\sqrt{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۲

نکته: معادله دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R به صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

نکته: فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

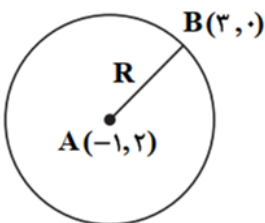
طبق شکل مقابل، اندازه AB همان شعاع دایره است، پس:

$$R = AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{20})^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 20 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y = 15$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



۱۳

نکته: در بیضی به قطر بزرگ $2a$ ، قطر کوچک $2b$ و فاصله کانونی $2c$ داریم: $a^2 = b^2 + c^2$

نکته: در بیضی، مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند و معمولاً با حرف e نمایش می‌دهند.

طبق مفروضات سؤال داریم:

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5, \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{c}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow c = 3 \qquad a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

بیضی قائم و نقطه $O(2, -4)$ مرکز بیضی است، پس رئوس ناکانونی بیضی به صورت زیر هستند:

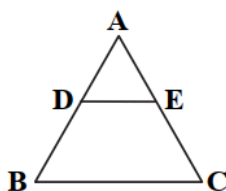
$$B(2+4, -4) \Rightarrow B(6, -4) \qquad B'(2-4, -4) \Rightarrow B'(-2, -4)$$

پس با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۴ درست است.

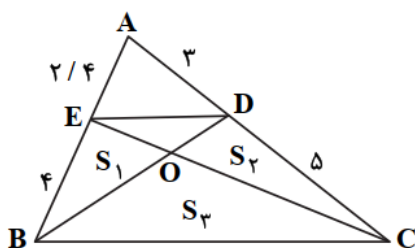
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۴

نکته (عکس قضیه تالس): مانند شکل مقابل در مثلث ABC ، اگر $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ ، آنگاه: $DE \parallel BC$



از E به D وصل می‌کنیم و داریم:



$$\begin{cases} \frac{AE}{EB} = \frac{2/4}{4} = 0.5 \\ \frac{AD}{DC} = \frac{3}{5} = 0.6 \end{cases} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} ED \parallel BC$$

چون $ED \parallel BC$ است، فاصله E تا BC با فاصله D تا BC برابر است. در نتیجه ارتفاع مثلث‌های EBC و BCD برابر و قاعده هر دو مثلث نیز BC است. بنابراین داریم:

$$S_{\triangle EBC} = S_{\triangle BCD} \Rightarrow S_1 + S_3 = S_2 + S_3 \Rightarrow S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = 1 \Rightarrow \frac{S_{\triangle EBO}}{S_{\triangle OCD}} = 1$$

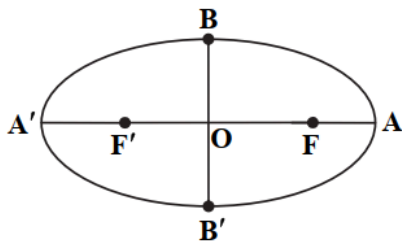
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۵

نکته: مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن (F و F')، مقدار ثابتی است و با طول قطر بزرگ بیضی برابر است.

نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

نکته: در هر بیضی با $AA' = 2a$ ، $BB' = 2b$ و $FF' = 2c$ داریم:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

با توجه به شکل، از آنجا که $BO \perp FF'$ داریم:

$$S_{\triangle BFF'} = \frac{1}{2} \times FF' \times OB = \frac{1}{2} \times 2c \times b = bc$$

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ BF + BF' = 2a \end{cases} \Rightarrow MF + MF' + BF + BF' = 2a = BFMF' \text{ محیط}$$

با توجه به اطلاعات مسئله می‌دانیم:

$$\begin{cases} \frac{bc}{2a} = 0.6 \\ e = \frac{c}{a} = 0.8 \end{cases} \Rightarrow b = 3$$

از طرفی داریم:

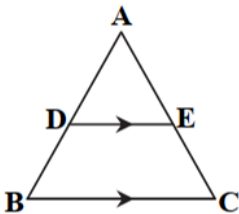
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = 0.8 \Rightarrow c^2 = 0.64a^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 0.64a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 25 \xrightarrow{a>0} a = 5$$

پس قطر بزرگ بیضی برابر با $2a = 10$ و قطر کوچک آن برابر با $2b = 6$ و مجموع آن‌ها برابر با ۱۶ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۶

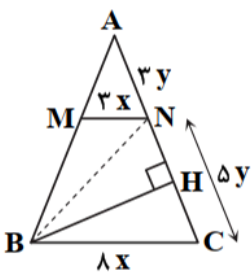
نکته (تعمیم قضیه تالس): اگر در مثلث ABC ، $DE \parallel BC$ ، آنگاه:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

اگر از B بر AC عمودی رسم کنیم تا آن را در H قطع کند، آنگاه BH ارتفاع دو مثلث BAN و BNC است.

پس نسبت مساحت این دو مثلث، برابر با نسبت قاعده آن‌ها است؛ بنابراین داریم:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{3}{8} \xrightarrow{\text{تفصیل درمخرج}} \frac{AN}{AC - AN} = \frac{3}{8 - 3} \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{3}{5}$$

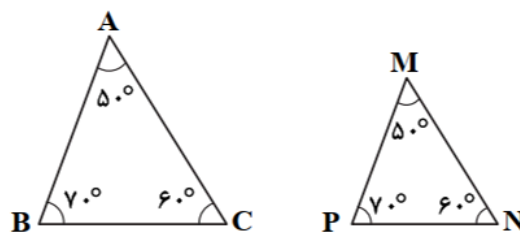
$$\frac{S_{\triangle BNC}}{S_{\triangle BAN}} = \frac{\frac{1}{2} \times BH \times NC}{\frac{1}{2} \times BH \times AN} = \frac{NC}{AN} = \frac{5}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

نکته: نسبت مساحت دو مثلث متشابه، مربع نسبت تشابه آن دو مثلث است.

$$\begin{cases} \hat{A} = 50^\circ, \hat{B} = 70^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ \\ \hat{M} = 50^\circ, \hat{N} = 60^\circ \Rightarrow \hat{P} = 70^\circ \end{cases} \Rightarrow$$



ابتدا دو مثلث داده‌شده را با توجه به معلومات سؤال رسم می‌کنیم:

بنابراین دو مثلث ABC و MPN ، بنا به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند. داریم:

$$\hat{C} = \hat{N} = 60^\circ \Rightarrow \frac{AB}{MP} = k \Rightarrow \frac{15}{MP} = k \quad (1)$$

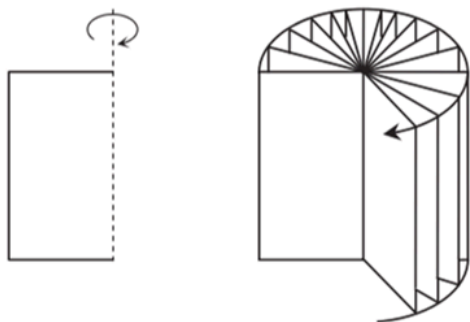
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MPN}} = k^2 \Rightarrow k^2 = 1/44 \xrightarrow{k>0} k = 1/2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{15}{MP} = 1/2 \Rightarrow MP = 12/5$$

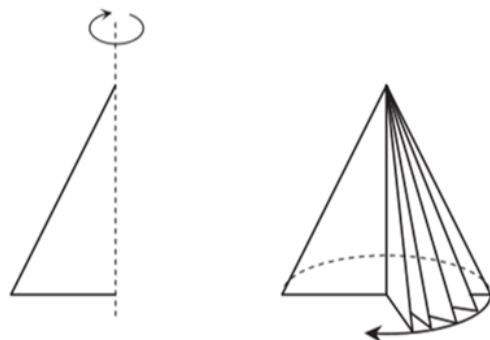
بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

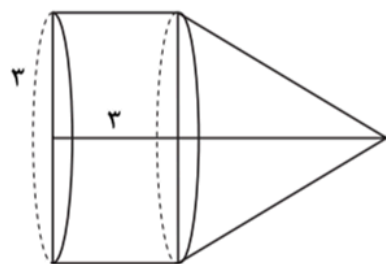
نکته: شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن یک استوانه است.



نکته: شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه یک مخروط است.



نکته: شکل حاصل از دوران دوزنقه حول قاعده بزرگ آن یک مخروط و یک استوانه است.
با توجه به فرض سؤال و نکات، داریم:



ابتدا، ارتفاع مخروط را به دست می آوریم:

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}$$



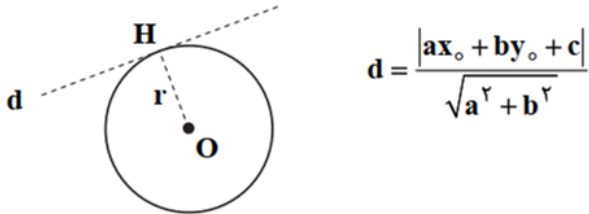
اکنون داریم:

$$\begin{cases} V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (3)^2 (\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}\pi \\ V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = \pi (3)^2 (3) = 27\pi \end{cases} \Rightarrow V_{\text{کل}} = 3\sqrt{3}\pi + 27\pi = 3\pi(\sqrt{3} + 9)$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله گسترده یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است. شعاع این دایره

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست می آوریم:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - m = 0 \Rightarrow O(2, -1), r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4 + 4m} = \sqrt{5 + m}$$

فاصله نقطه $O(2, -1)$ از خط $y = x$ برابر با شعاع دایره است. بنابراین:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ O(2, -1) \end{cases} \Rightarrow r = \frac{|2 + 1 - 0|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

حال داریم:

$$\sqrt{5 + m} = \frac{3}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 5 + m = \frac{9}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

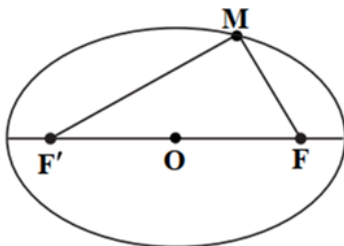
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

نکته: اگر در یک بیضی، اندازه نیم قطر بزرگ را a ، اندازه نیم قطر کوچک را b و نصف فاصله کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه: $a^2 = b^2 + c^2$.

نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می دهند.

نقطه M روی بیضی است؛ بنابراین:



$$MF + MF' = 2a$$

از طرفی محیط مثلث $MF'F$ برابر ۱۲ است، پس داریم:

$$MF + MF' + FF' = 12 \Rightarrow 2a + 2c = 12 \Rightarrow a + c = 6$$

خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{1}{2}$ است؛ بنابراین:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2c \xrightarrow{a+c=6} 3c = 6 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow a = 4$$

اکنون داریم:

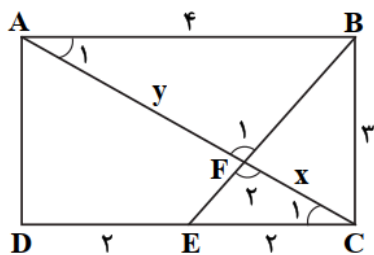
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2b = 4\sqrt{3} = \text{طول قطر کوچک}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۱

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.
ابتدا طول قطر مستطیل ABCD را به دست می‌آوریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = 5$$



مثلث‌های ABF و FCE متشابه هستند، زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{F}_1 = \hat{F}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle FCE$$

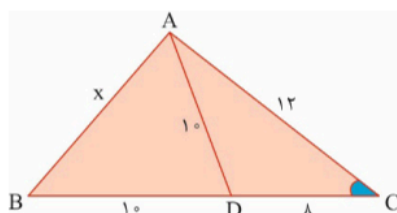
اکنون نسبت تشابه را می‌نویسیم و داریم:

$$\frac{AB}{EC} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{y}{x} \Rightarrow 2x = y (*)$$

$$AC = 5 \Rightarrow x + y = 5 \xrightarrow{(*)} 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



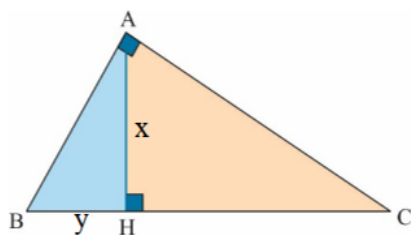
در دو مثلث ABC و ACD داریم:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

پس مطابق شکل این دو مثلث در رأس $\hat{C}$ مشترک بوده و اضلاع نظیر آن متناسب‌اند، در نتیجه با نسبت تشابه $k = \frac{2}{3}$ متشابه‌اند:

$$k = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 15$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

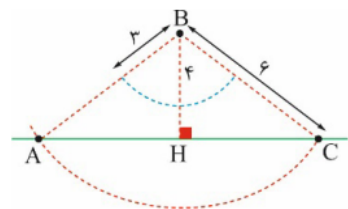


فرض می‌کنیم $BH = y$ است و در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 45 = (y)(12 + y) \Rightarrow y^2 + 12y - 45 = 0 \Rightarrow y = 3$$

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow x^2 = 3 \times 12 = 36 \Rightarrow x = 6$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



ابتدا از B به AC عمود می‌کنیم، سپس از نقطه B دو کمان به شعاع ۳ و ۶ می‌زنیم، مشاهده می‌شود که کمان با شعاع ۳، امتداد ضلع AC را قطع نمی‌کند. بنابراین مثلثی قابل رسم نیست.

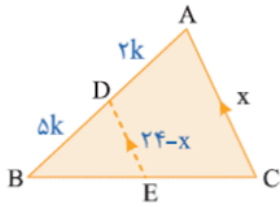
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۴

۲۵

سرنخ موازی بودن DE و AC نشون میده که لازمه از قضیه تالس استفاده کنید.

چون $DE + AC = 24$ و $AC = x$ است، پس $DE = 24 - x$ است. با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث ABC داریم:

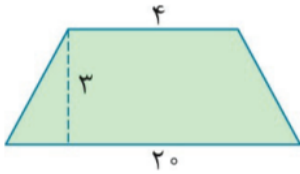


$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{24-x}{x} = \frac{5k}{7k} \Rightarrow \frac{24-x}{x} = \frac{5}{7} \Rightarrow x = 14$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۶

سطح مقطع حاصل، دوزنقه‌ای متساوی‌الساقین به قاعده‌های ۴ و ۲۰ و ارتفاع ۳ است:

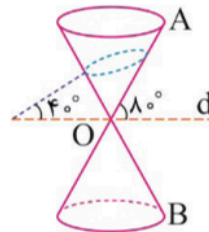


$$S = \frac{(4+20) \cdot 3}{2} = 36$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۷

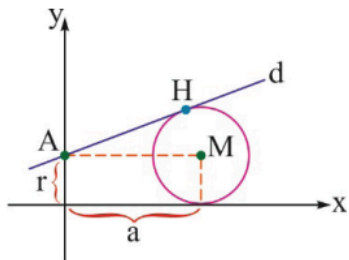
مطابق شکل با توجه به زاویه‌ها، صفحه موردنظر به صورت مایل سطح مخروطی را قطع می‌کند. پس مقطع ایجاد شده یک بیضی است.



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۸

با توجه به شکل، عرض از مبدأ خط d برابر شعاع دایره می‌باشد، پس:



$$d: 4x - 3y + 12 = 0 \xrightarrow{x=0} y = 4 \Rightarrow r = 4$$

پس $M(a, 4)$ مرکز دایره می‌باشد و داریم:

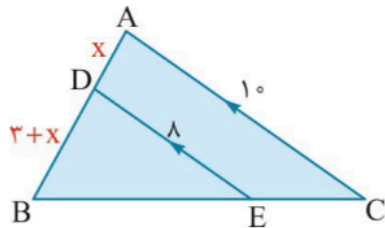
$$MH = r \Rightarrow \frac{|4a - 12 + 12|}{5} = 4 \Rightarrow |4a| = 20 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -5 \end{cases}$$

پس مرکز دایره $M(5, 4)$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۹

چون $BD - AD = 3$ است، با فرض $AD = x$ نتیجه می‌گیریم $BD = 3 + x$ است. حال طبق تالس جزء به کل داریم:



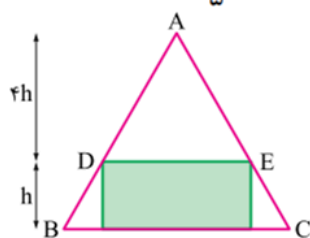
$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow \frac{3+x}{3+2x} = \frac{1}{10} \Rightarrow 30 + 10x = 24 + 16x$$

$$\Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 3 + 2x = 3 + 2(1) = 5$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۰

پاسخ تشریحی گام اول: از $AD = 4BD$ ، نتیجه می شود $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{5}$ ؛ پس $\frac{DE}{BC}$ هم طبق تالس جزء به کل می شود $\frac{4}{5}$.

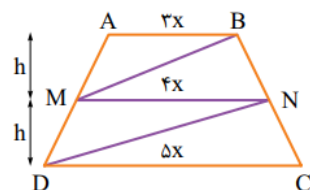


گام دوم: طبق تشابه مثلث ها، نسبت ارتفاع ها هم $\frac{4}{5}$ است. پس اگر ارتفاع ABC برابر $5h$ باشد، سهم ضلع عمودی مستطیل می شود h .

$$\frac{S_{\square}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{DE \times h}{BC \times \frac{5h}{2}} = \frac{DE}{BC} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25} = 0.32$$

گام سوم: نسبت مساحت ها را حساب می کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



پاسخ تشریحی گام اول: طبق سؤال $AB = 0.6CD$ ، پس $\frac{AB}{CD} = 0.6 = \frac{3}{5}$ ، از طرفی

$MN = 4x$ که وسط ساق ها را به هم وصل کرده برابر میانگین دو قاعده است؛ پس:

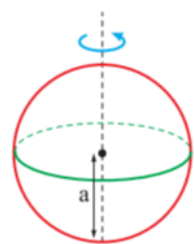
گام دوم: چون M و N وسط ساق ها هستند، ارتفاع دوزنقه بالا و پایین با هم برابرند.

گام سوم: نسبت مساحت دو مثلث برابر است با نسبت قاعده های آن ها.

چون ارتفاع ها مساوی اند:

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle DMN}} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

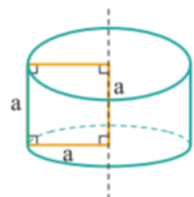
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



پاسخ تشریحی گام اول: از دوران نیم دایره ای به شعاع a حول قطر آن، کره ای به شعاع a حاصل می شود که

حجم آن برابر با $V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3$ است.

گام دوم: از دوران مربعی به طول ضلع a حول یکی از اضلاع آن، یک استوانه به شعاع قاعده a و ارتفاع a حاصل می شود که حجم آن برابر است با:



$$V_2 = \pi(a^2) \times a = \pi a^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{\pi a^3} = \frac{4}{3}$$

گام سوم: خواسته سؤال را به دست می آوریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۳

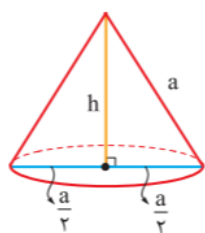
پاسخ تشریحی گام اول: محیط مثلث متساوی الاضلاع برابر با ۳۶ است، پس طول هر ضلع آن برابر $a = \frac{36}{3} = 12$ می شود.

گام دوم: ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر با $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است که در این جا $h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ می شود.

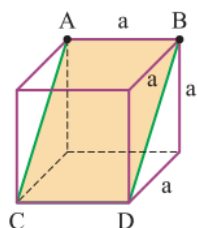
گام سوم: از دوران یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a حول یکی از ارتفاع های آن به طول h ، یک مخروط به شعاع قاعده $\frac{a}{2}$ و ارتفاع h حاصل می شود. حجم این مخروط را حساب می کنیم.

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times h$$

$$\frac{a=12}{h=6\sqrt{3}} \rightarrow V = \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{12}{2}\right)^2 \times 6\sqrt{3} = 72\pi\sqrt{3}$$



(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



پاسخ تشریحی گام اول: یال مکعب را برابر با a در نظر می گیریم. در مربعی به طول اضلاع a ،

قطر برابر با $a\sqrt{2}$ است. پس مطابق شکل زیر:

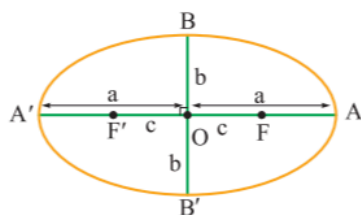
$$AB = a, BD = a\sqrt{2}$$

گام دوم: مقطع سایه خورده، یک مستطیل به طول BD و عرض AB است. مساحت آن برابر است با:

$$AB \times BD = 4\sqrt{2} \Rightarrow a \times a\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

گام سوم: حجم مکعب برابر با $a^3 = 2^3 = 8$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



پاسخ تشریحی گام اول: مطابق شکل روبه رو، نسبت طول قطر بزرگ بیضی (AA') به قطر کوچک آن (BB') ، برابر با $\frac{5}{3}$ است، پس:

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 5k \\ b = 3k \end{cases}$$

گام دوم: در بیضی رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است، پس:

$$(\Delta k)^2 = (3k)^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 2\Delta k^2 - 9k^2 = 16k^2 \Rightarrow c = 4k$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4k}{\Delta k} = \frac{4}{\Delta} = 0.8$$

گام سوم: خروج از مرکز بیضی برابر است با:

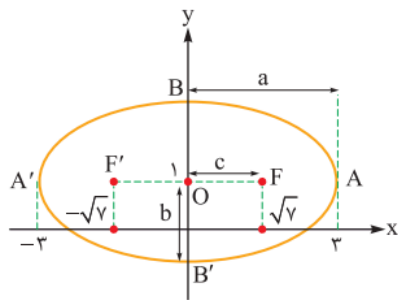
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۵

۳۶

پاسخ تشریحی گام اول: طبق تعریف، مجموعه نقاطی که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه $(\sqrt{7}, 1)$ و $(-\sqrt{7}, 1)$ مقدار ثابت ۶ است، یک بیضی به کانون‌های $(\sqrt{7}, 1)$ و $(-\sqrt{7}, 1)$ است که در آن $2a = 6$ می‌باشد.

گام دوم: مطابق شکل زیر، چون عرض کانون‌های بیضی یکسان است، پس بیضی افقی است و در آن $c = \sqrt{7}$ و $a = 3$ است؛ هم‌چنین مرکز بیضی نقطه $O(0, 1)$ است.



گام سوم: با استفاده از رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ در بیضی مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$3^2 = b^2 + (\sqrt{7})^2 \Rightarrow 9 = b^2 + 7 \Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

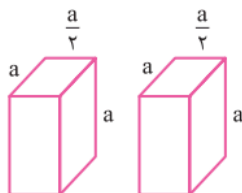
گام چهارم: کم‌ترین عرض بیضی مربوط به نقطه B' است که عرض آن برابر با $1 - \sqrt{2}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

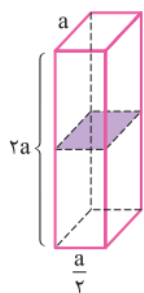
۳۷

پاسخ تشریحی گام اول: طول ضلع مکعب اولیه را a در نظر می‌گیریم. مساحت آن $6a^2$ است.

گام دوم: با برش، دو مکعب مستطیل یکسان مطابق شکل مقابل به دست می‌آید.



گام سوم: دو مکعب مستطیل را از کوچک‌ترین وجه به هم می‌چسبانیم تا مکعب مستطیل زیر حاصل شود. سپس سطح آن را حساب می‌کنیم.



$$S = 2(a)\left(\frac{a}{2}\right) + 2(2a)\left(\frac{a}{2}\right) + 2(2a)(a)$$

$$\Rightarrow S = a^2 + 2a^2 + 4a^2 = 7a^2$$

گام چهارم: مساحت مکعب مستطیل حاصل $\frac{7a^2}{6a^2} = \frac{7}{6}$ مساحت مکعب اولیه است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

پاسخ تشریحی گام اول: طول قطر کوچک بیضی ۶ است؛ پس:

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

گام دوم: خروج از مرکز بیضی $\frac{4}{5}$ است؛ پس:

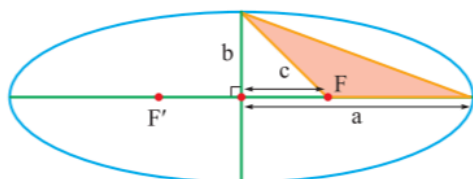
$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = 4k, a = 5k$$

گام سوم: رابطه $b^2 + c^2 = a^2$ را می‌نویسیم.

$$3^2 + (4k)^2 = (5k)^2 \Rightarrow 9 + 16k^2 = 25k^2 \Rightarrow 9k^2 = 9 \Rightarrow k^2 = 1 \xrightarrow{k>0} k = 1$$

پس $a = 5$ و $c = 4$ است.

گام چهارم: مساحت قسمت رنگی برابر است با:

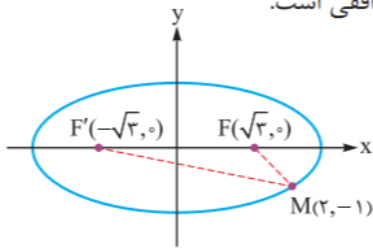


$$S = \frac{1}{2} b \times (a - c)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 3 \times (5 - 4) = 1/2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

گام اول: شکل بیضی را رسم می‌کنیم. چون عرض کانون‌ها یکسان است؛ پس بیضی افقی است.



$$FF' = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2c = 2\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

گام دوم: فاصله کانونی را حساب می‌کنیم.

گام سوم: فاصله نقطه M تا هر یک از کانون‌ها را حساب می‌کنیم.

$$MF = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+4+3-4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{6})(\sqrt{2})} = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$MF' = \sqrt{(-1-0)^2 + (2+\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+4+3+4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{6})(\sqrt{2})} = \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

گام چهارم: مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن برابر با 2a است؛ پس:

$$2a = MF + MF' = \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{2} = 2\sqrt{6} \Rightarrow a = \sqrt{6}$$

گام پنجم: خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

گام اول: معادله دایره به مرکز (۳، -۴) و شعاع ۱۰ را می‌نویسیم.

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 10^2$$

گام دوم: هر یک از نقاط داده‌شده در گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$\textcircled{1} (5-3)^2 + (-2+4)^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \neq 100$$

$$\textcircled{2} (-5-3)^2 + (2+4)^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \checkmark$$

$$\textcircled{3} (2-3)^2 + (-5+4)^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 2 \neq 100$$

$$\textcircled{4} (-2-3)^2 + (5+4)^2 = 5^2 + 9^2 = 106 \neq 100$$

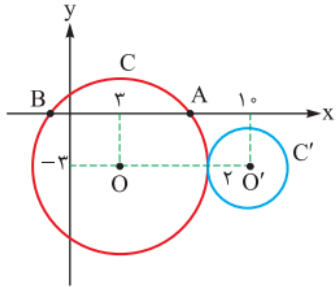
پس $\textcircled{2}$ جواب است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

گام اول: ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره $C': x^2 + y^2 + 6y - 20x = -105$ را به دست می آوریم:

$$O'(-(-\frac{20}{2}), \frac{-6}{2}) \Rightarrow O'(10, -3)$$

$$R' = \sqrt{-105 + (\frac{6}{2})^2 + (-\frac{20}{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$



گام دوم: شکل سؤال را رسم می کنیم.

گام سوم: از آن جایی که $OO' = 10 - 3 = 7$ ، $R' = 2$ و دو دایره مماس بیرون هستند؛ پس:

$$OO' = R + R' \Rightarrow 7 = 2 + R \Rightarrow R = 5$$

گام چهارم: معادله دایره C را می نویسیم.

$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

گام پنجم: محل تقاطع دایره C با محور X ها از قراردادن $y = 0$ در معادله دایره به دست می آید.

$$(x - 3)^2 + (0 + 3)^2 = 5^2 \Rightarrow (x - 3)^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow x - 3 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x_A = 7 \\ x_B = -1 \end{cases}$$

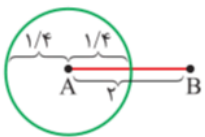
گام ششم: طول وتر AB برابر با $7 - (-1) = 8$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

گام اول: ابتدا پاره خط AB را رسم می کنیم:



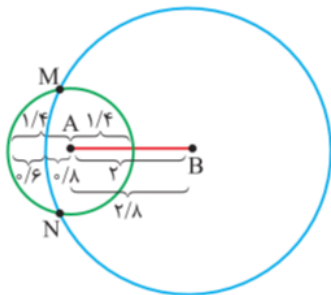
گام دوم: برای پیدا کردن نقاطی از صفحه که از A به فاصله $\sqrt{2} \approx 1/4$ هستند، دایره ای به مرکز A و به شعاع $\sqrt{2} \approx 1/4$ می کشیم:



رسم می کنیم:

گام سوم: و برای پیدا کردن نقاطی از صفحه که از B به فاصله $2\sqrt{2} \approx 2/8$ هستند هم دایره ای به مرکز

B و به شعاع $2\sqrt{2} \approx 2/8$ رسم می کنیم:



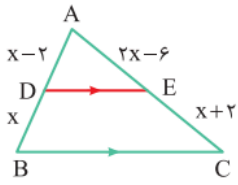
گام چهارم: حالا با توجه به شکل رسم شده، واضح است که ۲ نقطه در صفحه داریم که به فاصله $\sqrt{2}$ از A و به فاصله $2\sqrt{2}$ از B هستند. (نقاط M و N)

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۳

پاسخ تشریحی

گام اول: طبق گفته سؤال، چهارضلعی BDEC دوزنقه است، پس $DE \parallel BC$ می شود. با استفاده از تالس جزء به جزء در مثلث ABC داریم:



$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} \Rightarrow \frac{x-2}{x} = \frac{2x-6}{x+2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (x-2)(x+2) = x(2x-6) \Rightarrow x^2 - 4 = 2x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=20} \begin{cases} x = \frac{6+\sqrt{20}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2} = 3+\sqrt{5} \checkmark \\ x = \frac{6-\sqrt{20}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{2} = 3-\sqrt{5} \times \end{cases}$$

غ ق چون در این صورت $x-2$ و $2x-6$ منفی می شوند.

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{x-2}{2x-2}$$

گام دوم: حالا از تالس جزء به کل کمک می گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{DE}{BC} &= \frac{3+\sqrt{5}-2}{2(3+\sqrt{5})-2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}+4} \times \frac{2\sqrt{5}-4}{2\sqrt{5}-4} \\ &= \frac{10-4\sqrt{5}+2\sqrt{5}-4}{20-16} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

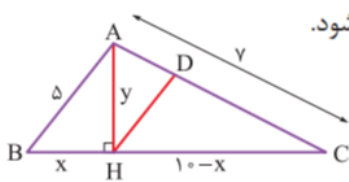
گام سوم: بنابراین نسبت قاعده های دوزنقه برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۴

پاسخ تشریحی

گام اول: ابعاد را روی شکل مشخص می کنیم. با فرض $BH = x$ ، $CH = 10 - x$ می شود.



گام دوم: در مثلث ABC، پاره خط DH موازی AB است؛ پس طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{DH}{AB} = \frac{CH}{BC} = \frac{10-x}{10} \xrightarrow{AB=5} \frac{DH}{5} = \frac{10-x}{10} \Rightarrow DH = \frac{10-x}{2} \quad (1)$$

گام سوم: برای محاسبه مقدار x، قضیه فیثاغورس را در هر یک از مثلث های ACH و ABH می نویسیم:

$$\begin{cases} \Delta ACH: y^2 = 7^2 - (10-x)^2 \\ \Delta ABH: y^2 = 5^2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow 7^2 - \underbrace{(10-x)^2}_{100+x^2-20x} = 5^2 - x^2 \Rightarrow 49 - 100 - x^2 + 20x = 25 - x^2$$

$$\Rightarrow 20x = 76 \Rightarrow x = 3/8$$

$$DH = \frac{10-3/8}{2} = \frac{6/2}{2} = 3/1$$

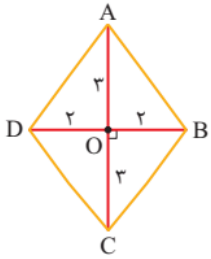
گام چهارم: مقدار x را در (۱) جای گذاری می کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

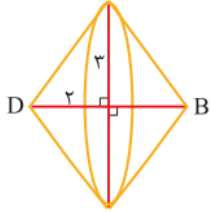
۴۵

پاسخ تشریحی

گام اول: یک شکل فرضی برای لوزی رسم می‌کنیم. فرض کنید $AC = 6$ و $BD = 4$ باشد. می‌دانیم در لوزی، قطرهای عمودمنصف یکدیگرند؛ پس $BO = DO = \frac{BD}{2} = 2$ و $AO = CO = \frac{AC}{2} = 3$ می‌شود.



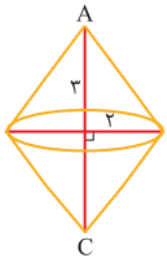
گام دوم: اگر لوزی را حول قطر کوچک، یعنی BD ، دوران دهیم، مطابق شکل، دو مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۲ حاصل می‌شود که در قاعده به هم چسبیده‌اند:



گام سوم: در این حالت، حجم شکل حاصل برابر است با (حجم شکل حاصل، دو برابر حجم یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۲ می‌شود):

$$\Rightarrow V = 2 \times \underbrace{\left(\frac{1}{3} \pi r^2 h \right)}_{\text{حجم مخروط}} = 2 \times \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 2 = 12\pi$$

گام چهارم: حالا اگر لوزی را حول قطر بزرگ، یعنی AC دوران دهیم، مطابق شکل، دو مخروط به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳ حاصل می‌شود که در قاعده به هم چسبیده‌اند:



گام پنجم: در این حالت، حجم شکل حاصل برابر است با (حجم شکل حاصل، دو برابر حجم یک مخروط به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳ می‌شود):

$$\Rightarrow V = 2 \times \underbrace{\left(\frac{1}{3} \pi R^2 h \right)}_{\text{حجم مخروط}} = 2 \times \frac{1}{3} \pi \times 2^2 \times 3 = 8\pi$$

گام ششم: بنابراین جواب برابر $\frac{12\pi}{8\pi} = \frac{3}{2}$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۶

پاسخ تشریحی

گام اول: طبق گفته سؤال، کانون‌های بیضی $F(1, 3)$ و $F'(1, -5)$ هستند، پس فاصله کانونی بیضی برابر است با:

$$FF' = 2c \Rightarrow \underbrace{3 - (-5)}_8 = 2c \Rightarrow c = 4$$

گام دوم: طول قطر کوچک بیضی برابر $2b = 6$ است؛ پس $b = 3$ می‌شود.

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=3, c=4} a^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

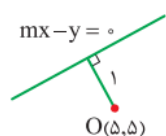
گام سوم: حالا داریم:

پس خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

گام اول: ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } O(-\frac{-10}{2}, -\frac{-10}{2}) \Rightarrow O(5, 5) \\ \text{شعاع: } r = \frac{\sqrt{(-10)^2 + (-10)^2 - 4 \times 49}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1 \end{cases}$$



گام دوم: برای این که خط $y = mx$ ، یا همان خط $mx - y = 0$ ، بر دایره مماس باشد، باید فاصله مرکز دایره $O(5, 5)$ از این خط، برابر شعاع دایره ($r = 1$) باشد:

$$\Rightarrow 1 = \frac{|\Delta m - 5|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

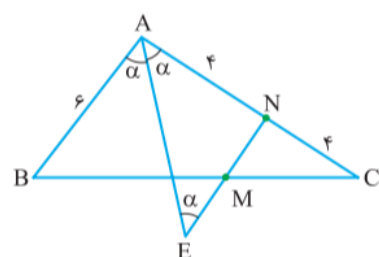
$$1 = \frac{|\Delta m - 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} \Rightarrow \sqrt{m^2 + 1} = |\Delta m - 5|$$

$$\xrightarrow{\text{توان}^2} m^2 + 1 = (\Delta m - 5)^2 \Rightarrow m^2 + 1 = 25m^2 - 50m + 25$$

$$\Rightarrow 24m^2 - 50m + 24 = 0 \xrightarrow{\div 2} 12m^2 - 25m + 12 = 0$$

حالا مجموع مقادیر m را می‌خواهیم که برابر مجموع ریشه‌های معادله بالا، یعنی برابر $\frac{25}{12} = -\frac{B}{A}$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



گام اول: نقاط M و N دو ضلع AC و BC را نصف می‌کنند، بنابراین رابطه

$$\frac{CN}{AC} = \frac{CM}{BC} \text{ برقرار است.}$$

از طرفی زاویه $\hat{C}$ نیز، در دو مثلث CMN و ABC مشترک است.

پس این دو مثلث به صورت نسبت دو ضلع و زاویه بینشان، متشابه هستند و $AB \parallel MN$ می‌باشد. داریم:

$$\frac{CN}{AC} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{MN}{6} \Rightarrow MN = 3$$

گام دوم: از طرفی $AB \parallel MN$ و AE خط مورب است، پس $\hat{E} = \alpha$ می‌شود.

گام سوم: مثلث AEN ، متساوی‌الساقین است. پس $AN = EN = 4$ می‌باشد.

گام چهارم: رابطه $EM = EN - MN = 4 - 3 = 1$ برقرار است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا برای هر دو دایره، مرکز و شعاع را به دست می‌آوریم:

$$C: x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(0, -\frac{(-2)}{2}) \Rightarrow O(0, 1) \\ R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{0 + 4 + 4} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$C': x^2 + y^2 - 2x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'(-\frac{(-2)}{2}, 0) \Rightarrow O'(1, 0) \\ R' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 0 - 4m} = \sqrt{1-m} \end{cases}$$

گام دوم: دو دایره باید بر هم مماس باشند؛ یا مماس خارج‌اند و یا مماس داخل:

یعنی شعاع R' برابر با صفر است که امکان‌پذیر نیست. $\Rightarrow \sqrt{1-m} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-m} = \sqrt{2} + \sqrt{1-m} \Rightarrow \sqrt{1-m} = 0$

۱) مماس خارج: $OO' = R + R' \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{1-m} \Rightarrow \sqrt{1-m} = 0$

۲) مماس داخل: $OO' = |R - R'| \Rightarrow \sqrt{2} = |\sqrt{2} - \sqrt{1-m}|$

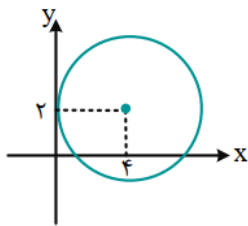
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} 2 = 2 - 2\sqrt{2-2m} + (1-m) \Rightarrow 2\sqrt{2-2m} = 1-m$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} 4(2-2m) = 1-2m+m^2 \Rightarrow 8-8m-1+2m-m^2 = 0$$

$$\Rightarrow -m^2 - 6m + 7 = 0 \Rightarrow m^2 + 6m - 7 = 0 \Rightarrow (m+7)(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -7 \end{cases}$$

اگر $m = 1$ باشد، $R' = 0$ می‌شود که قابل قبول نیست؛ پس $m = -7$ به دست می‌آید.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

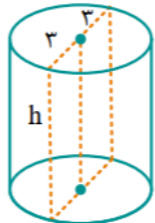


مطابق شکل، دایره بر محور y ها مماس است و شعاع آن ۴ واحد است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

باید صفحه مذکور عمود بر قاعده استوانه باشد. همچنین مساحت این مستطیل زمانی حداکثر خواهد بود که صفحه قاطع از مرکز قاعده عبور کند.

ارتفاع استوانه را به دست می‌آوریم:



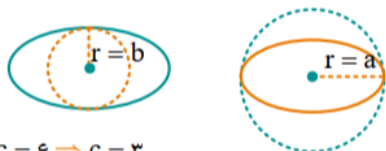
$$3^2 = 2^2 + h^2 \Rightarrow 9 = 4 + h^2 \Rightarrow h^2 = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

$$S = h \times 2r = \sqrt{5} \times 2 \times 2 = 4\sqrt{5}$$

مساحت سطح مقطع:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۲



مطابق اشکال مقابل، شعاع دایره برابر a یا b خواهد بود:

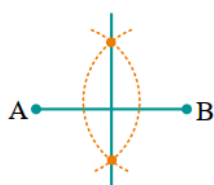
$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$\frac{c}{a} = 0.5 \Rightarrow \frac{3}{a} = 0.5 \Rightarrow a = 6$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

بنابراین، مقدار شعاع برابر ۶ یا $3\sqrt{3}$ خواهد بود.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۳

با در نظر گرفتن شعاع بیشتر از نصف طول پاره خط، با دو کمان، عمودمنصف قابل رسم است:

۵۴

اگر در یک چهارضلعی، قطرهای بر هم عمود باشند، لزوماً چهارضلعی لوزی نیست.

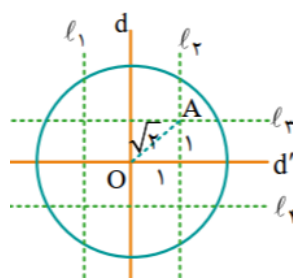
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۵

از تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x-1}{2x} = \frac{1}{y+1} = \frac{2}{2x} \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \Rightarrow x=3 \\ y+1=x=3 \Rightarrow y=2 \end{cases} \Rightarrow x+y=5$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



(۱) نقاطی که از خط d به فاصله ۱ می‌باشند، بر دو خط ℓ_1 و ℓ_2 موازی با d و به فاصله ۱ از آن قرار دارند.
 (۲) نقاطی که از خط d' به فاصله ۱ می‌باشند، بر دو خط ℓ_3 و ℓ_4 موازی با d' و به فاصله ۱ از آن قرار دارند.
 (۳) نقاطی که از O محل تلاقی d و d' به فاصله ۲ می‌باشند بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۲ واقع هستند.
 با توجه به اینکه OA برابر با $\sqrt{2}$ می‌باشد، هیچ نقطه‌ای هر سه خاصیت را با هم ندارد. یعنی نقطه‌ای وجود ندارد که هم روی دایره C به مرکز O و شعاع ۲ باشد و هم روی یکی از جفت خطوط ℓ_1 و ℓ_2 و روی یکی از جفت خطوط ℓ_3 و ℓ_4 باشد.

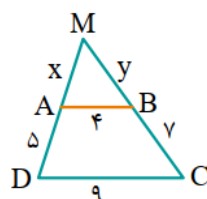
(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۷

$$\frac{x}{x+5} = \frac{y}{y+7} = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=\frac{28}{5} \end{cases}$$

MDC مثلث $30/6$ محیط

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)



دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ABD$ به حالت تناسب دو ضلع و برابری زاویه بین متشابه هستند.

۵۸

$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{BD} &= \frac{BC}{AB} = 2 \\ \hat{B} &= \hat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AC}{AD} = 2 \Rightarrow \frac{10}{AD} = 2 \Rightarrow AD = 5$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۹

نکته: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

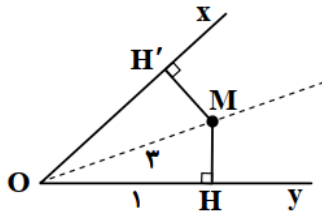
طبق رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OHM داریم:

$$MH^2 = OM^2 - OH^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow MH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

چون M روی نیمساز زاویه XOY قرار دارد، پس فاصله‌اش از دو ضلع این زاویه برابر است.

$$MH' = MH = 2\sqrt{2}$$

بنابراین:



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۰

نکته: در دو مثلث متشابه، زاویه‌ها برابرند.

دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه هستند، پس حتماً زاویه‌های آنها با هم برابر است.

بنابراین $\hat{B}$ یا $\hat{C}$ برابر 40° می‌باشد:

$$\hat{A} = 65^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = 40^\circ \Rightarrow \text{در گزینه‌ها وجود ندارد} \\ \hat{C} = 40^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (40^\circ + 65^\circ) = 75^\circ \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۱

نکته: نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، مربع نسبت اضلاع متناظر آن دو مثلث است، در واقع اگر نسبت تشابه k باشد، نسبت مساحت‌ها، k^2 می‌باشد.

چون دو مثلث متشابه هستند ولی همنهشت نیستند، پس در مثلث ABC، ضلع ۴ واحدی یا ضلع متوسط مثلث است یا ضلع بزرگ‌تر آن، چون در مثلث MNP کوچک‌ترین ضلع ۴ واحد است. پس دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$1) \hat{ABC} \text{ ضلع متوسط} = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{49}{16} \Rightarrow S_{MNP} = \frac{49}{16} S_{ABC}$$

$$2) \hat{ABC} \text{ ضلع بزرگ} = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16} \Rightarrow S_{MNP} = \frac{1}{16} S_{ABC}$$

پس مساحت مثلث MNP حداکثر $\frac{1}{16}$ برابر مساحت مثلث ABC است.

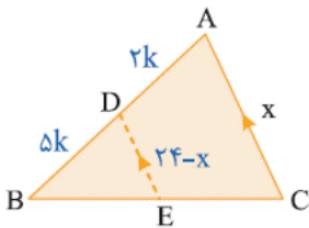
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۲

سرنخ موازی بودن DE و AC نشون میده که لازمه از قضیه تالس استفاده کنید.

چون $DE + AC = 24$ و $AC = x$ است، پس $DE = 24 - x$ است. با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث ABC داریم:

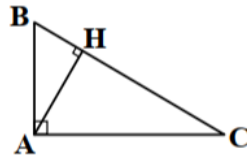
$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{24-x}{x} = \frac{5k}{7k} \Rightarrow \frac{24-x}{x} = \frac{5}{7} \Rightarrow x = 14$$



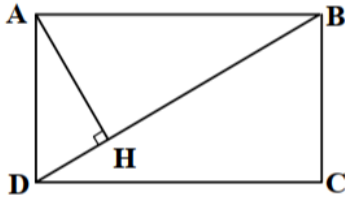
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۳

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



$$(AH)^2 = CH \times HB$$



در مثلث ABD چون AH ارتفاع وارد بر وتر BD است، مطابق نکته داریم:

$$(AH)^2 = HD \times HB \Rightarrow AH^2 = 1 \times 9 \Rightarrow AH = 3 \Rightarrow S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 10 = 15$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر $30 = 2 \times 15$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۴

گام اول: در شکل خطوط موازی دیده نمی‌شود، پس امکان استفاده از قضیه تالس وجود ندارد. هم‌چنین به‌جز مشترک بودن زاویه A در دو مثلث ABC و ADE، زاویه برابر دیگری در این دو مثلث موجود نیست، پس امکان استفاده از تشابه مثلث‌ها نیز فراهم نیست؛ بنابراین تنها راه ممکن محاسبه مساحت هر مثلث است.

گام دوم: با توجه به رابطه سینوسی مساحت مثلث داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A}{\frac{1}{2} AD \times AE \times \sin A} = \frac{2x}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + x - 2} = \frac{3}{10} \Rightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 20x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 17x - 6 = 0$$

گام سوم: جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم:

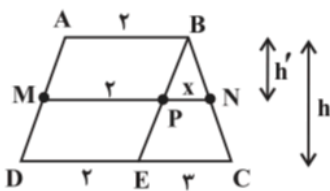
$$\Delta = (-17)^2 - 4(3)(-6) = 361$$

$$x = \frac{17 \pm 19}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \text{ ق. ق.} \\ x = -\frac{1}{3} \text{ ق. غ.} \end{cases}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۵

با توجه به شکل روبرو داریم:



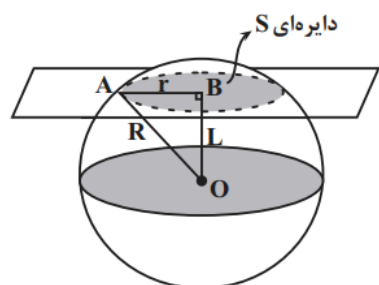
$$\left. \begin{aligned} S_{ABNM} &= \frac{(2+2+x)h'}{2} \\ S_{ABCD} &= \frac{(2+5)h}{2} \end{aligned} \right\} \div \frac{4+x}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{x}{2} \quad \text{دو مثلث BNP و BCE متشابه‌اند.}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x = \frac{21}{2} \xrightarrow{+4} (x+2)^2 = \frac{29}{2} \Rightarrow x+2 = \sqrt{\frac{29}{2}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۶



$$R = 20$$

$$S = \pi r^2 = 100\pi \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$$

$$\text{فیتاغورس: } r^2 + L^2 = R^2 \Rightarrow (10^2) + L^2 = (20^2)$$

$$L^2 = 400 - 100 = 300 \Rightarrow L = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۷

$$\frac{S_{BF'A}}{S_{A'F'B'}} = \frac{(a+c)b}{(a-c)b} = \gamma \Rightarrow a+c = \gamma a - \gamma c \Rightarrow \gamma a = \lambda c \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\gamma}{\lambda} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{خروج از مرکز: } e = \frac{3}{4}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۸

فاصله دایره به مرکز $(2,1)$ از خط مماس $x - y = -1$ برابر شعاع است.

$$r = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, O(2,1)$$

حال که مرکز و شعاع دایره را داریم معادله دایره را می‌نویسیم و سپس y را مساوی صفر می‌گذاریم تا محل برخورد با محور x ها را پیدا کنیم:

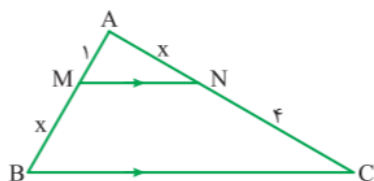
$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\xrightarrow{y=0} (x-2)^2 + (0-1)^2 = 2 \rightarrow (x-2)^2 = 1 \rightarrow |x-2| = 1$$

$$\rightarrow x-2 = \pm 1 \begin{cases} \rightarrow x-2=1 \rightarrow x=3 \\ \rightarrow x-2=-1 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۹

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا به کمک قضیه تالس، مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 2$$

با توجه به موازی بودن MN و BC ، دو مثلث AMN و ABC متشابه هستند و نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت تشابه دو مثلث است.

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

با استفاده از تفاضل نسبت در مخرج، به جای مساحت مثلث ABC ، مساحت دوزنقه $MNCB$ را جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC} - S_{AMN}} = \frac{1}{9-1} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{MNCB}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}} = 8$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۰

$$\triangle HBC \sim \triangle BHD \rightarrow \text{تناسب سه ضلع}$$

$$\hat{\beta} = \hat{BHD} \text{ طبق تشابه}$$

$$\hat{\alpha} = \hat{DHE} \text{ طبق خطوط موازی} \rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{BHE} = 45^\circ$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷۱

طبق روابط طولی داریم:

$$AH^2 = CH \times BH \quad 64 = 16 \times BH \Rightarrow BH = 4 \quad \text{فیتاغورس: } AB^2 = BH^2 + AH^2 = 16 + 64 = 80 \Rightarrow AB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

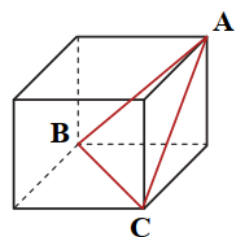
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، سطح مقطع آن نامیده می شود. با توجه به شکل، مقطع جدا شده، یک مثلث متساوی الاضلاع است که هر ضلع آن برابر طول قطر یک وجه مکعب (قطر مربع) است. اگر ضلع مکعب برابر a باشد، داریم:

$$AB = AC = BC = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{(\text{ضلع})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow V_{\text{مکعب}} = a^3 = 8$$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

نکته: مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

نکته: اگر در یک بیضی، اندازه نیم قطر بزرگ را a ، اندازه نیم قطر کوچک را b و نصف فاصله کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه: $a^2 = b^2 + c^2$

نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می دهند.

$$FF' = 2c = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

نقاط $F(3, 0)$ و $F'(0, 3)$ کانون های بیضی هستند، پس:

بیضی از مبدأ مختصات عبور کرده است، پس مجموع فاصله O تا F و F' ، برابر با $2a$ است:

$$OF + OF' = 2a \Rightarrow 3 + 3 = 2a \Rightarrow a = 3$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

نکته: رابطه $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ معادله دایره ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در صفحه مختصات است که به آن «معادله استاندارد دایره» می گوئیم.

نکته: اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله گسترده یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است. شعاع این دایره

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

برابر است با:

نکته: پاره خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می کند، «خطالمرکزین» نامیده می شود.

اگر $OO' = |r - r'|$ ، دو دایره مماس درون هستند.

ابتدا مختصات مرکز و شعاع هر دو دایره را به دست می آوریم:

$$C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0 \Rightarrow O(2, -1), r = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 44} = 4$$

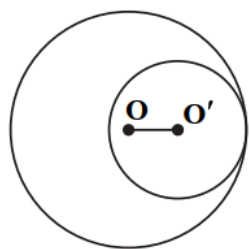
$$C': (x+1)^2 + (y-3)^2 = 81 \Rightarrow O'(-1, 3), r' = \sqrt{81} = 9$$

$$d = OO' = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \Rightarrow 5 = 9 - 4 \Rightarrow d = r' - r$$

اکنون طول خطالمرکزین را به دست می آوریم: $d = r' - r$

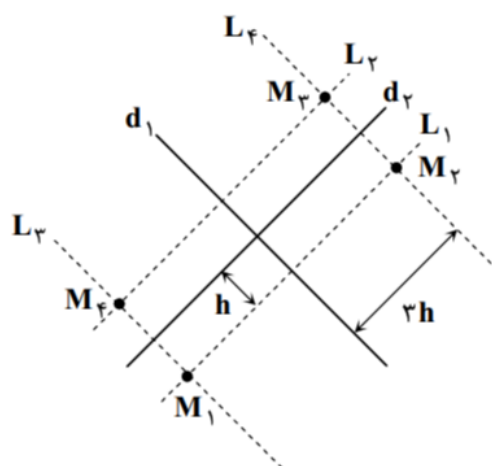
بنابراین دو دایره مماس درون هستند.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)



۷۵

نقاطی که از خط d_2 به فاصله h باشند، روی دو خط L_1 و L_2 موازی d_2 در دو طرف آن و به فاصله h از d_2 هستند و همچنین نقاطی که از خط d_1 به فاصله $3h$ باشند، روی دو خط L_3 و L_4 موازی d_1 در دو طرف آن و به فاصله $3h$ از d_1 هستند. محل‌های برخورد L_1 و L_2 با L_3 و L_4 جواب‌های مسئله هستند، پس حداکثر ۴ نقطه M_1, M_2, M_3 و M_4 با این شرایط وجود دارد.



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۶

ابتدا با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلث AMN، طول MN را به دست می‌آوریم:

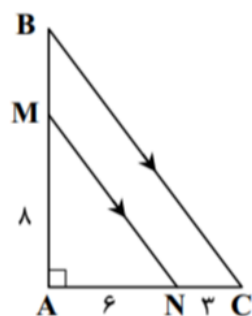
$$\triangle AMN : AM^2 + AN^2 = MN^2 \Rightarrow 6^2 + 3^2 = MN^2 \Rightarrow MN = 10$$

حال با توجه به قضیه تالس داریم:

$$\triangle ABC : MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{8}{MB} = \frac{6}{3} \Rightarrow MB = 4$$

اکنون با استفاده از تعمیم قضیه تالس یا فیثاغورس، طول BC را به دست می‌آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{10}{BC} \Rightarrow BC = 15 \\ \text{یا} \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 144 + 81 = 225 \Rightarrow BC = 15 \end{array} \right.$$



$$MBCN \text{ محیط} = BM + BC + NC + MN = 4 + 15 + 3 + 10 = 32$$

بنابراین محیط دوزنقه MBCN برابر است با:

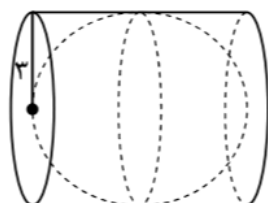
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۷

حجم حاصل، یک استوانه به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ است که درون آن یک کره به شعاع ۳ خالی شده است.

بنابراین حجم شکل دوران یافته برابر است با:

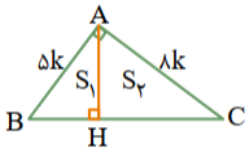
$$V = \pi r^2 h - \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi \times 3^2 \times 6 - \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 54\pi - 36\pi = 18\pi$$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۸

می‌دانیم با رسم ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، سه مثلث متشابه وجود می‌آید، بنابراین داریم:



$$\begin{aligned} \triangle ABH \sim \triangle ACH &\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{\Delta k}{\lambda k}\right)^2 = \frac{25}{64} \\ \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_2} &= \frac{25 + 64}{64} = \frac{89}{64} \end{aligned}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$F(2,0), F'(-2,0) \Rightarrow FF' = 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\text{فرض طبق } MF + MF' = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 \Rightarrow b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

$$\text{طول قطر کوچک} = 2b = 2\sqrt{5}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۹

می‌دانیم در هر بیضی، خروج از مرکز بیضی که با e نمایش داده می‌شود به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} e = \frac{c}{a} &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \\ \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \frac{\text{طول قطر بزرگ}}{\text{طول قطر کوچک}} &= \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

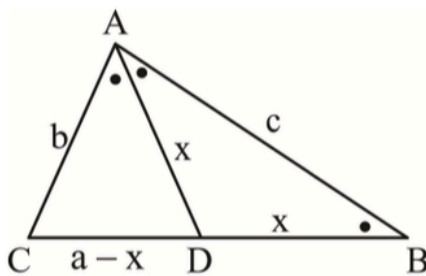
بنابراین داریم:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۸۰

در شکل روبه‌رو AD نیم‌ساز است.

۸۱



$$\hat{A} = 2\hat{B} \Rightarrow \hat{CAD} = \hat{DAB} = \hat{B}$$

$$AD = DB = x$$

پس مثلث ADB متساوی‌الساقین است و داریم:

حالا و مثلث ACD و ABC متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{x}{c} = \frac{a-x}{b} = \frac{b}{a}$$

$\nwarrow$ روبه‌روی $\hat{C}$ $\swarrow$ روبه‌روی B و CAD

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a} \Rightarrow a^2 = b^2 + bc \Rightarrow bc = a^2 - b^2$$

$$\text{پس } x = \frac{bc}{a} \text{ و با ترکیب دو کسر اول داریم:}$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

پس می‌توان نوشت:

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)